

# Geometría I

## Examen XIV

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Geometría I

## Examen XIV

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Víctor Naranjo Cabrera

Granada, 2025

**Asignatura** Geometría I.

**Curso Académico** 2024-25.

**Grado** Doble Grado de Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Ana María Hurtado Cortegana y Antonio Ros Mulero.

**Descripción** Convocatoria ordinaria.

**Fecha** 17 de enero de 2025.

**Ejercicio 1** (2.5 puntos). En el espacio  $\mathbb{R}^4$ , con vectores  $(x, y, z, t)$ , y para todo  $a$  real consideramos los subespacios vectoriales definidos, uno por sistema de generadores y otro por ecuaciones implícitas,

$$U = \mathcal{L}(\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, -a, -1)\}), W = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} ax - y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}$$

- (a) Calcula, para todo  $a$ , unas ecuaciones implícitas de  $U$  y una base de  $W$ .
- (b) Estudia si para  $a = 1$  se verifica o no la descomposición en suma directa  $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ .

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Sea  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación lineal dada por

$$f \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (b - c, a + d, a - d)$$

- (a) Calcula el núcleo y la imagen de  $f$ .
- (b) Halla las coordenadas respecto de la base dual de la base canónica de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de  $f^t(\varphi)$ , donde  $\varphi$  es la forma lineal de  $(\mathbb{R}^3)^*$  dada por  $\varphi(x, y, z) = x + y + z$ .

**Ejercicio 3** (2.5 puntos). Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  de dimensión finita.

- (a) Prueba que si  $f \in \text{End}(V)$  tal que  $f \circ f = f \Rightarrow V = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ .
- (b) Dado  $v \in V \setminus \{0\}$  prueba que existe  $f \in \text{End}(V)$  tal que  $f \circ f = f$  y  $\ker(f^t) = \text{an}(\{v\})$ .

**Ejercicio 4** (2.5 puntos). Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- (a) Para toda matriz antisimétrica de orden impar con coeficientes en  $\mathbb{R}$  existe una fila que es combinación lineal del resto.
- (b) Sean  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  de dimensión finita mayor o igual que 2 y  $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ . Entonces existen dos bases distintas  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  tales que  $v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}'}$ . ¿Es cierta la afirmación para cualesquiera par de bases de  $V$ ?
- (c) Sean  $V$  y  $V'$  espacios vectoriales sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  de dimensión finita y  $f : V \rightarrow V'$  una aplicación lineal. Entonces,  $f$  es inyectiva  $\Leftrightarrow f^t$  es sobreyectiva.

**Ejercicio 1** (2.5 puntos). En el espacio  $\mathbb{R}^4$ , con vectores  $(x, y, z, t)$ , y para todo  $a$  real consideramos los subespacios vectoriales definidos, uno por sistema de generadores y otro por ecuaciones implícitas,

$$U = \mathcal{L}(\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, -a, -1)\}), W = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} ax - y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}$$

(a) Calcula, para todo  $a$ , unas ecuaciones implícitas de  $U$  y una base de  $W$ .

Un vector  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  está en  $U$  si y sólo si es combinación lineal de  $v_1 := (0, 1, 1, 1), v_2 := (1, 0, -a, -1)$ , es decir, si y sólo si la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -a & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. Vemos que  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ , así que vamos orlando el menor anterior con la tercera fila y las columnas tercera y cuarta, obteniendo las dos ecuaciones implícitas de  $U$  respecto de la base usual de  $\mathbb{R}^4$ :

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ x & y & z \end{vmatrix} = -ax + y - z, \quad 0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & y & t \end{vmatrix} = -x + y - t$$

Para calcular una base de  $W$ , solucionamos el sistema homogéneo dado por sus ecuaciones implícitas. La matriz de coeficientes de este sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el menor  $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ , tomamos  $y, z$  como incógnitas principales y  $x, t$  como incógnitas secundarias (parámetros), es decir, escribimos el sistema como

$$\left. \begin{array}{l} y = ax + t \\ z = -x \end{array} \right\}$$

Dando valores a los parámetros obtenemos: si  $(x, t) = (1, 0)$ , entonces  $(y, z) = (a, -1)$ ; y si  $(x, t) = (0, 1)$ , entonces  $(y, z) = (1, 0)$ . Por tanto, los vectores

$$v_3 := (1, a, -1, 0), \quad v_4 := (0, 1, 0, 1)$$

forman base de  $W$ .

(b) Estudia si para  $a = 1$  se verifica o no la descomposición en suma directa  $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ .

Para  $a = 1$ , los vectores que hemos calculado en el apartado anterior son

$$v_1 := (0, 1, 1, 1), \quad v_2 := (1, 0, -1, -1), \quad v_3 := (1, 1, -1, 0), \quad v_4 := (0, 1, 0, 1).$$

Como

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

concluimos que  $v_1, v_2, v_3, v_4$  son linealmente dependientes. Así que no pueden formar base, lo que impide que  $\mathbb{R}^4$  sea suma directa de  $U$  y  $W$ . Como  $U$  y  $W$  tienen dimensión 2, tenemos  $U \cap W \neq \{0\}$  y  $U + W \neq \mathbb{R}^4$ .

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Sea  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación lineal dada por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (b - c, a + d, a - d)$$

(a) Calcula el núcleo y la imagen de  $f$ .

Calculamos primero  $\ker(f)$ :

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : (b - c, a + d, a - d) = (0, 0, 0) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : b = c, a = d = 0 \right\} = \mathcal{L} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right). \end{aligned}$$

Podemos calcular  $\text{Im}(f)$  de dos maneras:

**Fórmula de la nulidad y el rango.** Como  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} V$ ,  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(f) = 1 \Rightarrow 4 = 1 + \dim \text{Im}(f)$ , luego  $\dim \text{Im}(f) = 3$  y por tanto,  $f$  es sobreyectiva. Así que la imagen de  $f$  es  $\mathbb{R}^3$ .

**Formando una base de  $\text{Im}(f)$**  Llamamos  $E_{ij}$  a las matrices de la base usual de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Así,  $f(E_{11}) = (0, 1, 1)$ ,  $f(E_{12}) = (1, 0, 0)$ ,  $f(E_{21}) = (-1, 0, 0)$ ,  $f(E_{22}) = (0, 1, -1)$ , luego

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \mathcal{L}(\{f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22})\}) \\ &= \mathcal{L}(\{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, -1)\}) \\ &= \mathcal{L}(\{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, -1)\}) = \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que los vectores  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, -1)$  son linealmente independientes, porque

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

(b) Halla las coordenadas respecto de la base dual de la base canónica de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de  $f^t(\varphi)$ , donde  $\varphi$  es la forma lineal de  $(\mathbb{R}^3)^*$  dada por  $\varphi(x, y, z) = x + y + z$ .

Llamemos  $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  a la base ordenada usual de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  y  $\mathcal{B}^* = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{22})$  a su base ordenada dual. Entonces, las coordenadas que nos piden son

$$\begin{aligned} (f^t(\varphi))_{\mathcal{B}^*} &= ([f^t(\varphi)](E_{11}), [f^t(\varphi)](E_{12}), [f^t(\varphi)](E_{21}), [f^t(\varphi)](E_{22})) \\ &= ((\varphi \circ f)(E_{11}), (\varphi \circ f)(E_{12}), (\varphi \circ f)(E_{21}), (\varphi \circ f)(E_{22})) \\ &= (\varphi(0, 1, 1), \varphi(1, 0, 0), \varphi(-1, 0, 0), \varphi(0, 1, -1)) = (2, 1, -1, 0). \end{aligned}$$

**Ejercicio 3** (2.5 puntos). Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  de dimensión finita.

- (a) Prueba que si  $f \in \text{End}(V)$  tal que  $f \circ f = f \Rightarrow V = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

Veamos que  $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ : sea  $x \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$ . Como  $x \in \text{Im}(f)$  existe  $z \in V$  tal que  $x = f(z)$ . Como  $x \in \ker(f)$ , tenemos

$$0 = f(x) = f(f(z)) = (f \circ f)(z) = f(z) = x.$$

Por tanto,  $x = 0$ , y así,  $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ . Por la fórmula de la nulidad y el rango, concluimos que  $V = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

- (b) Dado  $v \in V \setminus \{0\}$  prueba que existe  $f \in \text{End}(V)$  tal que  $f \circ f = f$  y  $\ker(f^t) = \text{an}(\{v\})$ .

Sabemos que

$$\ker(f^t) = \text{an}(\{v\}) = \text{an}(\text{Im}(f)) \Rightarrow \text{Im}(f) = \text{an}(\text{an}(\{v\})) = \mathcal{L}(\{v\}).$$

Entonces, sea  $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ , tomemos  $x_1, \dots, x_{n-1}$  de un subespacio suplementario de  $\mathcal{L}(\{v\})$  en  $V$ , tal que  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_{n-1}, v)$  es base ordenada de  $V$ . Sea  $f$  el único endomorfismo dado por el teorema fundamental de las aplicaciones lineales a partir de

$$f(x_i) = 0, \forall i = 1, \dots, n-1, f(v) = v.$$

Entonces

$$\text{Im}(f) = \mathcal{L}(\{f(x_1), \dots, f(x_{n-1}), f(v)\}) = \mathcal{L}(\{0, \dots, 0, v\}) = \mathcal{L}(\{v\})$$

y por tanto  $\ker(f^t) = \text{an}(\text{Im}(f)) = \text{an}(\mathcal{L}(\{v\})) = \text{an}(\{v\})$ , mientras que  $f \circ f = f$  ya que  $f \circ f$  y  $f$  coinciden sobre los vectores de la base  $\mathcal{B}$

**Ejercicio 4.** Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- (a) Para toda matriz antisimétrica de orden impar con coeficientes en  $\mathbb{R}$  existe una fila que es combinación lineal del resto.

Verdadero: Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  antisimétrica, es decir  $A^t = -A$ . Tomando determinantes

$$\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

Como estamos suponiendo  $n$  impar, tenemos  $\det(A) = -\det(A)$ , luego  $\det(A) = 0$ . Esto equivale a que el rango de  $A$  por filas es menor que  $n$ , es decir, al menos una fila de  $A$  es combinación lineal del resto.

- (b) Sean  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $K$  de dimensión finita mayor o igual que 2 y  $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ . Entonces existen dos bases distintas  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  tales que  $v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}'}$ . ¿Es cierta la afirmación para cualesquiera par de bases de  $V$ ?

La primera afirmación es verdadera: Como  $v \neq 0$ , el conjunto  $\{v\}$  es linealmente independiente. Por el Teorema de Ampliación de la Base, existe una base ordenada de  $V$  del tipo  $\mathcal{B} = (v, v_2, \dots, v_n)$  para vectores  $v_2, \dots, v_n \in V$ . Tomemos  $\mathcal{B}' = (v, v_2, \dots, v_{n-1}, 2v_n)$ , también base ordenada de  $V$ . Vemos entonces que  $v_{\mathcal{B}} = (1, 0, \dots, 0) = v_{\mathcal{B}'}$ . La segunda afirmación es falsa: Consideremos las bases ordenadas  $\mathcal{B} = (v, v_2, \dots, v_n)$ ,  $\mathcal{B}'' = (v_2, v, v_3, \dots, v_n)$  Entonces

$$v_{\mathcal{B}} = (1, 0, \dots, 0) \neq (0, 1, 0, \dots, 0) = v_{\mathcal{B}''}.$$

Y no es cierta para cualesquiera par de bases de  $V$ .

- (c) Sean  $V$  y  $V'$  espacios vectoriales sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  de dimensión finita y  $f : V \rightarrow V'$  una aplicación lineal. Entonces,  $f$  es inyectiva  $\Leftrightarrow f^t$  es sobreyectiva.

La afirmación es verdadera:

- $\Rightarrow$ )  $f$  es inyectiva si y sólo si  $n(\ker(f)) = 0$ . Por la fórmula de la nulidad y el rango aplicada a  $f$ , esto equivale a que  $\dim_{\mathbb{K}} V = r(f)$ . Por el Teorema del Rango,  $r(f) = r(f^t)$ , luego  $\dim_{\mathbb{K}} V = r(f^t)$  Como  $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} V^*$ , lo anterior equivale a que  $\dim_{\mathbb{K}} V^* = r(f^t)$ , luego  $f^t$  es sobreyectiva.
- $\Leftarrow$ )  $f^t : (V')^* \rightarrow V^*$  es sobreyectiva si y solo si  $\text{Im}(f^t) = V^* = \text{an}(\ker(f))$  Tomando anuladores, esto equivale a que  $\ker(f) = \text{an}(V^*) = \{0\}$ , es decir, a que  $f$  es inyectiva.